**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Н.В.Грановская, А.В.Наставкин**

# СБОРНИК ЗАДАЧ

**для лабораторных и самостоятельных занятий по дисциплине**
**«Математические методы моделирования в геологии»**

Для студентов геологических специальностей
геолого-географического факультета

**г. Ростов-на-Дону**
**2002**

*Печатается по решению кафедры Месторождений полезных ископаемых (протокол № 7 от 12.03.2002 г.). Одобрено УМК 14.03.2002 г.*

# СОДЕРЖАНИЕ

с.

ПРЕДИСЛОВИЕ …….. 4

ТЕМА 1. ОДНОМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ……...

5

Задача 1.1. Определение петрографического типа неогеновых лав с использованием преобразований числовой геологической информации в графическую …….. 5

Задача 1.2. Предварительный анализ химического состава коры выветривания на месторождении никеля ……... 6

Задача 1.3. Статистический анализ угловых величин при изучении тектонической структуры рудопроявлений ……...…
10

Задача 1.4. Статистическая обработка данных при проверке геологических гипотез ……..…
15

ТЕМА 2. ДВУМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ……... 22

Задача 2.1. Проверка гипотезы о существовании корреляционной связи между свинцом и золотом в рудах полиметаллического месторождения. Редактирование файла данных. Использование корреляционных связей для предсказания свойств геологических объектов …….. 22

Задача 2.2. Проверка гипотезы о существовании корреляционной связи между содержанием гидрослюды в углях и зольностью углей на территории Сулино-Садкинского геолого-промышленного района Восточного Донбасса. Использование корреляционных связей для предсказания свойств геологических объектов ……..… 24

ТЕМА 3. МНОГОМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ……..…

26

Задача 3.1. Оценка содержания попутного полезного компонента в полиметаллических рудах с помощью корреляционного анализа и уравнения регрессии ……...
26

ТЕМА 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ……..
35

Задача 4.1. Выделение ассоциаций химических элементов, классификация признаков и точек наблюдения, выбор информативных признаков оруденения, идентификация и прогнозная оценка геологического объекта с использованием методов корреляционного, кластерного, факторного анализов. Графическое изображение значений прогнозного фактора по поисковому профилю
……... 35

ЛИТЕРАТУРА ……... 38

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Значения t-критерия Стьюдента для 5%-ного уровня значимости.38

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Значения F-критерия Фишера для 5%-ного уровня значимости ... 39

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В программе лабораторных занятий по курсу «Математические методы моделирования в геологии» предусматривается решение практических геологических задач с использованием статистических процедур. В данном сборнике предлагается несколько вариантов таких задач по основным темам курса: одномерные, двумерные, многомерные статистические модели, математическое описание пространственных геологических закономерностей. Задачи решаются в компьютерном классе с использованием ЭВМ и применением программы «STATISTICA for Windows». Для каждой темы приводится несколько задач различного геологического содержания. Помимо условия, к каждой задаче даются требования и методические указания, а также таблицы цифровых данных. В конце сборника приведена использованная литература и вспомогательные методические пособия.

Выбор типов геологических задач, включенные в сборник, проводился с учётом дисциплин, изученных студентами в предшествующий период обучения. Задачи приведены в порядке очередности их решения на лабораторных занятиях, который согласуется с изложением теоретической части курса на лекциях. Они основаны на фактическом материале, полученном при изучении реальных геологических объектов. В процессе их решения студенты знакомятся с областью применения различных математических методов в геологии, особенностями геологической информации, факторами, влияющими на выбор типа геолого-математических моделей. Большинство задач имеет комплексный характер. Решение общей геологической задачи в этом случае базируется на решении частных задач. Каждый студент самостоятельно выполняет частную задачу.

Выводы по общей содержательной задаче могут формулироваться совместно всеми студентами в учебной подгруппе.

Навыки, полученные при изучении данного курса, студенты будут реализовывать при выполнении дипломных проектов и работ.

# ТЕМА 1. ОДНОМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

## Задача 1.1. Определение петрографического типа неогеновых лав с использованием преобразований числовой геологической информации в графическую

Для определения петрографического типа пород из горизонта неогеновых лав отобрано и проанализировано на содержание $SiO_2$ 30 проб (табл. 1.1). Содержание $SiO_2$ в отдельных пробах меняется от 56.6 (андезитобазальт) до 73.2% (риолит), что не позволяет оценить состав лав в целом по единичному наблюдению. Для получения усредненных характеристик приведенные в таблице 1.1 данные необходимо преобразовать в графическую диаграмму «ящик с усами».

***Требуется***:

1) определить средний состав лав;

2) определить преобладающий состав для большинства проб;

3) определить разброс значений.

***Методические указания***. Задача решается с использованием процедур программы «STATISTICA», а затем путем анализа полученной графической информации.

1. Создается файл данных, используя числовую таблицу 1.1.

Таблица 1.1

Содержание $SiO_2$ (%) в неогеновых лавах

| № проб | $SiO_2$ | № проб | $SiO_2$ | № проб | $SiO_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 59,5 | 11 | 62,9 | 21 | 71,4 |
| 2 | 66,8 | 12 | 62,4 | 22 | 67,6 |
| 3 | 60,5 | 13 | 71,6 | 23 | 63,6 |
| 4 | 63,7 | 14 | 65,8 | 24 | 61,1 |
| 5 | 72,5 | 15 | 63,1 | 25 | 63,8 |
| 6 | 69,2 | 16 | 61,2 | 26 | 67,5 |
| 7 | 61,2 | 17 | 69,3 | 27 | 65,3 |
| 8 | 66,3 | 18 | 64,6 | 28 | 69,9 |
| 9 | 73,2 | 19 | 67,8 | 29 | 73,2 |
| 10 | 64,6 | 20 | 56,6 | 30 | 60,7 |

2. В меню программы «STATISTICA» выбирается «Basic Statistics/Tables» и подпункт «Descriptive statistics». В диалоговом окне «Descriptive Statistics» нажимает-

ся кнопка «Box & whisker plot for all variables». В появившемся новом окне вводится имя переменной для исследования.

3. Для определения петрографического типа пород можно использовать классификацию магматических пород Ф.Ю.Левинсон-Лессинга: к средним породам (группа диорита—андезита) относятся породы с содержанием $SiO_2$ от 52 до 65%, к кислым породам (группа гранита—риолита) относятся породы с содержанием $SiO_2$ больше 65%.

4. Полученный график зарисовывается, анализируется, результаты анализа с выводами сдаются преподавателю в письменном виде.

## Задача 1.2. Предварительный анализ химического состава коры выветривания на месторождении никеля

Месторождение силикатного никеля приурочено к латеритной коре выветривания ультрамафитов. По минеральному составу и текстурным особенностям в вертикальном разрезе коры выветривания сверху вниз выделяются шесть зон:

Зона 1. Железистых стяжений;

Зона 2. Бесструктурных охр;

Зона 3. Конечных структурных охр;

Зона 4. Структурных полуохр;

Зона 5. Выщелоченных материнских пород;

Зона 6. Дезинтегрированных материнских пород.

Для изучения химического состава коры выветривания и поведения различных химических элементов в процессе корообразования на одном из участков месторождения из каждой зоны были отобраны пробы, по которым выполнены анализы на $Fe_2O_3$, NiO, CoO, $SiO_2$, MgO, $Al_2O_3$, $Cr_2O_3$ (табл. 1.2.1 –1.2.7).

***Требуется:***

1) выявить отличительные особенности химического состава различных зон;

2) установить характер поведения различных химических элементов в процессе корообразования;

3) выделить ассоциации химических элементов, сходных по характеру поведения в процессе корообразования.

Задание можно выполнять бригадой из восьми студентов. Каждый студент самостоятельно выполняет пункты 1-2 по одной из таблиц 1.2.1-1.2.7. Пункт 3 выполняется совместно членами бригады.

***Методические указания***. Для выявления различий химического состава коры выветривания разных зон необходимо результаты анализов на каждый химический элемент представить в виде, удобном для сравнения. Исходные данные можно преобразовать в графические диаграммы «ящик с усами». Задача решается с использованием процедур программы «STATISTICA», а затем путем анализа полученной графической информации.

1. Создается файл данных, используя одну из числовых таблиц 1.2.1 –1.2.7.

2. В меню программы «STATISTICA» выбирается «Basic Statistics/Tables» и его подпункт «Descriptive statistics». В диалоговом окне «Descriptive Statistics» нажимается кнопка «Box & whisker plot for all variables». В появившемся новом окне вводятся имена переменных для исследования. Здесь нужно выбрать пункт «Select All». Таким образом, на один график будут помещены диаграммы, характеризующие разные зоны.

3. Диаграммы можно использовать для анализа поведения химических элементов в процессе породообразования. Уменьшение значения медианы при переходе от нижней зоны к верхней указывает на вынос данного элемента, а увеличение — на его малую подвижность и накопление в коре выветривания. Увеличение размаха варьирования (длины «усов») без заметного смещения медианы указывает на локальное перераспределение данного элемента в пределах зоны.

4. Полученный график зарисовывается, результаты анализа с выводами сдаются преподавателю в письменном виде.

Таблица 1.2.1

Содержание $Fe_2O_3$ в различных зонах коры выветривания

| № проб | Зона 1 | Зона 2 | Зона 3 | Зона 4 | Зона 5 | Зона 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 56,26 | 68,78 | 65,90 | 52,08 | 13,11 | 5,95 |
| 2 | 57,20 | 71,21 | 69,70 | 54,31 | 14,05 | 5,79 |
| 3 | 61,06 | 63,49 | 61,01 | 48,85 | 20,28 | 6,24 |
| 4 | 58,63 | 65,49 | 67,72 | 33,07 | 21,37 | 5,09 |
| 5 | | 70,04 | 59,60 | 32,08 | | |
| 6 | | 70,13 | 61,32 | 33,41 | | |
| 7 | | 70,38 | 61,92 | 28,18 | | |
| 8 | | | | 28,58 | | |
| 9 | | | | 32,17 | | |
| 10 | | | | 40,19 | | |
| 11 | | | | 27,51 | | |
| 12 | | | | 29,83 | | |

Таблица 1.2.2

Содержание NiO в различных зонах коры выветривания

| № проб | Зона 1 | Зона 2 | Зона 3 | Зона 4 | Зона 5 | Зона 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,35 | 1,65 | 1,36 | 1,23 | 0,42 | 0,27 |
| 2 | 0,38 | 1,36 | 0,90 | 2,59 | 1,33 | 0,41 |
| 3 | 0,50 | 1,06 | 1,35 | 3,63 | 1,22 | 0,44 |
| 4 | 0,29 | 1,44 | 1,30 | 2,32 | 1,12 | 0,32 |
| 5 | | 1,35 | 0,66 | 1,17 | | |
| 6 | | 1,12 | 1,65 | 1,41 | | |
| 7 | | 1,10 | 2,69 | 1,16 | | |
| 8 | | | | 2,58 | | |
| 9 | | | | 2,09 | | |
| 10 | | | | 3,28 | | |
| 11 | | | | 1,50 | | |
| 12 | | | | 2,55 | | |

Таблица 1.2.3

Содержание CoO в различных зонах коры выветривания

| № проб | Зона 1 | Зона 2 | Зона 3 | Зона 4 | Зона 5 | Зона 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,089 | 0,200 | 0,197 | 0,206 | 0,019 | 0,090 |
| 2 | 0,073 | 0,046 | 0,056 | 0,213 | 0,027 | 0,013 |
| 3 | 0,013 | 0,143 | 0,320 | 0,078 | 0,037 | 0,015 |
| 4 | 0,027 | 0,255 | 0,085 | 0,108 | 0,039 | 0,013 |
| 5 | | 0,028 | 0,039 | 0,091 | | |
| 6 | | 0,016 | 0,076 | 0,104 | | |
| 7 | | 0,095 | | 0,067 | | |
| 8 | | | | 0,069 | | |
| 9 | | | | 0,059 | | |
| 10 | | | | 0,080 | | |
| 11 | | | | 0,045 | | |
| 12 | | | | 0,070 | | |

Таблица 1.2.4

Содержание $SiO_2$ в различных зонах коры выветривания

| № проб | Зона 1 | Зона 2 | Зона 3 | Зона 4 | Зона 5 | Зона 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,73 | 2,30 | 3,98 | 12,48 | 36,00 | 37,52 |
| 2 | 7,91 | 3,27 | 2,32 | 13,26 | 38,77 | 38,96 |
| 3 | 4,40 | 7,92 | 6,32 | 18,99 | 33,44 | 41,30 |
| 4 | 5,28 | 4,21 | 2,02 | 26,19 | 34,15 | 38,21 |
| 5 | | 1,97 | 6,37 | 24,20 | | |
| 6 | | 3,09 | 10,89 | 26,51 | | |
| 7 | | 2,00 | 11,26 | 27,04 | | |
| 8 | | | | 28,36 | | |
| 9 | | | | 26,10 | | |
| 10 | | | | 21,94 | | |
| 11 | | | | 37,86 | | |
| 12 | | | | 31,12 | | |

Таблица 1.2.5

Содержание MgO в различных зонах коры выветривания

| № проб | Зона 1 | Зона 2 | Зона 3 | Зона 4 | Зона 5 | Зона 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,85 | 0,75 | 1,00 | 8,78 | 32,66 | 38,96 |
| 2 | 0,95 | 1,05 | 0,50 | 8,26 | 28,54 | 38,22 |
| 3 | 0,80 | 1,25 | 2,60 | 7,72 | 27,69 | 37,28 |
| 4 | 1,10 | 1,00 | 0,85 | 17,64 | 26,74 | 39,18 |
| 5 | | 0,75 | 2,85 | 18,25 | | |
| 6 | | 1,75 | 3,15 | 18,35 | | |
| 7 | | 1,05 | 2,70 | 19,68 | | |
| 8 | | | | 20,58 | | |
| 9 | | | | 19,54 | | |
| 10 | | | | 15,20 | | |
| 11 | | | | 12,92 | | |
| 12 | | | | 18,25 | | |

Таблица 1.2.6

Содержание $Al_2O_3$ в различных зонах коры выветривания

| № проб | Зона 1 | Зона 2 | Зона 3 | Зона 4 | Зона 5 | Зона 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14,45 | 10,62 | 9,95 | 7,91 | 1,88 | 0,92 |
| 2 | 15,99 | 6,26 | 6,53 | 5,52 | 2,16 | 0,66 |
| 3 | 14,14 | 10,05 | 6,94 | 4,32 | 2,51 | 0,66 |
| 4 | 14,17 | 10,35 | 6,55 | 4,08 | 1,77 | 0,39 |
| 5 | | 7,63 | 10,88 | 8,08 | | |
| 6 | | 6,81 | 6,43 | 4,18 | | |
| 7 | | 7,55 | 4,54 | 7,13 | | |
| 8 | | | | 3,42 | | |
| 9 | | | | 3,98 | | |
| 10 | | | | 3,14 | | |
| 11 | | | | 5,10 | | |
| 12 | | | | 2,63 | | |

Таблица 1.2.7

Содержание $Cr_2O_3$ в различных зонах коры выветривания

| № проб | Зона 1 | Зона 2 | Зона 3 | Зона 4 | Зона 5 | Зона 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,70 | 2,36 | 2,32 | 2,49 | 1,22 | 0,40 |
| 2 | 2,24 | 2,97 | 2,76 | 2,42 | 0,49 | 0,36 |
| 3 | 2,80 | 2,34 | 2,03 | 0,24 | 0,94 | 0,28 |
| 4 | 3,28 | 2,19 | 2,62 | 1,79 | 1,12 | 0,28 |
| 5 | | 3,53 | 3,11 | 1,58 | | |
| 6 | | 2,81 | 2,31 | 1,81 | | |
| 7 | | 2,69 | 2,06 | 1,72 | | |
| 8 | | | | 1,28 | | |
| 9 | | | | 1,68 | | |
| 10 | | | | 1,88 | | |
| 11 | | | | 1,23 | | |
| 12 | | | | 1,50 | | |

## Задача 1.3. Статистический анализ угловых величин при изучении тектонической структуры рудопроявлений

В одном из перспективных на олово районов при вскрытии канавами геохимических аномалий выявлено три участка оловянной минерализации. Оруденение представлено маломощными жилами и прожилками кварца с касситеритом. В некоторых канавах отмечены также не содержащие касситерит кварц-флюоритовые жилы. Во вмещающих породах — мезозойских песчаниках и алевролитах — зафиксированы многочисленные неминерализованные трещины.

Для расшифровки тектонической структуры района и уточнения направления дальнейших геологоразведочных работ необходимо провести статистический анализ замеров элементов залегания вмещающих пород, трещин и жильных образований, приведенных в таблицах 1.3.1, 1.3.2.

***Требуется***: выполнить следующие расчеты, построения и процедуры статистического анализа.

1. По каждой совокупности замеров:

а) получить основные параметры распределения замеров;

б) проверить гипотезу о соответствии нормальному или логнормальному закону распределения графическим способом.

2. Проверить гипотезу о равенстве азимутов падения:

а) рудных жил и слоистости;

б) рудных и кварц-флюоритовых жил;

в) рудных жил и неминерализованных трещин;

г) кварц-флюоритовых жил и слоистости;

д) кварц-флюоритовых жил и неминерализованных трещин.

3. По результатам статистического анализа необходимо сделать вывод:

а) о предполагаемой ориентировке рудоконтролирующих структур;

б) о стадийности гидротермальной деятельности.

***Методические указания.***

1. Используя статистическую программу для ЭВМ, создать файл данных по одной из таблиц 1.3.1 или 1.3.2.

2. Провести процедуру описательной статистики и получить необходимые параметры распределения (среднее, минимальное, максимальное значения, дисперсию, стандартное отклонение) для каждой совокупности замеров (для слоистости, жил с касситеритом, жил с флюоритом, неминерализованных трещин) из файла данных.

3. Преобразовать цифровую информацию в графическую (гистограмму, «ящик с усами»). Сделать вывод о законе распределения замеров элементов трещин. Провести предварительное сравнение основных параметров распределения замеров на графиках: для слоистости, жил с касситеритом, жил с флюоритом, неминерализованных трещин.

4. Для проверки гипотезы о равенстве средних угловых направлений можно использовать критерии Стьюдента — t (при нормальном законе распределении), Родионова — Z (при логнормальном законе распределения). Гипотеза о равенстве дисперсий двух выборок проверяется с помощью критерия Фишера — F. Сравниваются только выборки с одинаковым законом распределения. При этом на калькуляторе необходимо выполнить следующие расчеты:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}, \qquad (1)$$

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ — средние значения параметров по сравниваемым объектам; $S_1^2$ и $S_2^2$ — оценки дисперсий; $N_1$ и $N_2$ — объемы выборок, по которым рассчитаны средние значения.

Значение t сравнивают с максимально допустимым значением $t_\alpha$ при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $k = N_1 + N_2 - 2$ (таблица значений критерия Стьюдента помещена в приложении 1. Уровень значимости α при подобных исследованиях обычно принимается равным 0,05). Если значения $t < t_\alpha$, то гипотеза о равенстве средних не отвергается.

В условиях логнормального закона критерий Стьюдента заменяют критерием Родионова — Z.

Критерий Фишера (F) рассчитывается по отношению дисперсий двух выборок:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \qquad (2)$$

где $S_1^2$ — бóльшая; $S_2^2$ — меньшая из сравниваемых оценок дисперсий.

В случае логнормального закона распределения сравнивают дисперсии логарифмов.

Величину критерия Фишера сравнивают с допустимым значением $F_\alpha$ (приложение 2) при уровне значимости $\alpha = 5\%$ и степенях свободы $k_1 = N_1 - 1$ и $k_2 = N_2 - 1$. Если значение F окажется меньше $F_\alpha$, то расхождением между оценками дисперсий можно пренебречь как случайными. При $F > F_\alpha$ гипотеза о равенстве дисперсий отвергается.

Таблица 1.3.1

Замеры элементов залегания слоистости, жил и неминерализованных трещин

| № п/п | Азимуты падения | | | |
|---|---|---|---|---|
| | слоистости | кварцевых жил с касситеритом | кварцевых жил с флюоритом | неминерализованных трещин |
| 1 | 4 | 190 | 40 | 210 |
| 2 | 70 | 192 | 44 | 280 |
| 3 | 122 | 176 | 114 | 86 |
| 4 | 120 | 230 | 220 | 164 |
| 5 | 154 | 308 | 80 | 268 |
| 6 | 138 | 290 | 80 | 88 |
| 7 | 350 | 198 | 308 | 152 |
| 8 | 50 | 154 | 12 | 282 |
| 9 | 50 | 357 | 48 | 212 |
| 10 | 68 | 338 | 112 | 292 |
| 11 | 86 | 170 | 62 | 256 |
| 12 | 88 | 174 | 54 | 186 |
| 13 | 240 | 88 | 70 | 280 |
| 14 | 354 | 150 | 40 | 282 |
| 15 | 14 | 90 | 50 | 200 |
| 16 | 22 | 336 | 14 | 120 |
| 17 | 304 | 292 | 230 | 150 |
| 18 | 44 | 180 | 268 | 238 |
| 19 | 70 | 110 | 354 | 180 |
| 20 | 78 | 296 | 360 | 170 |
| 21 | 174 | 262 | 74 | 258 |
| 22 | 164 | 204 | 92 | 22 |
| 23 | 346 | 310 | 100 | 314 |
| 24 | 24 | 250 | 120 | 118 |
| 25 | 42 | 142 | 100 | 172 |
| 26 | 220 | 48 | 172 | 200 |
| 27 | 290 | 166 | 186 | 160 |
| 28 | 18 | 214 | 142 | 190 |
| 29 | 40 | 280 | 174 | 220 |
| 30 | 110 | 274 | 82 | 194 |
| 31 | 130 | 194 | 58 | 300 |
| 32 | 314 | 222 | 310 | 188 |
| 33 | 352 | 258 | 330 | 112 |
| 34 | 7 | 22 | 230 | 252 |
| 35 | 42 | 314 | 302 | 216 |
| 36 | 98 | 186 | 2 | 202 |
| 37 | 286 | 114 | 0 | 310 |
| 38 | 44 | 108 | 28 | 188 |
| 39 | 74 | 354 | 50 | 100 |
| 40 | 100 | 308 | 68 | 72 |

Таблица 1.3.2

Замеры элементов залегания слоистости, жил и неминерализованных трещин

| № п/п | Азимуты падения | | | |
|---|---|---|---|---|
| | слоистости | кварцевых жил с касситеритом | кварцевых жил с флюоритом | неминерализованных трещин |
| 1 | 100 | 120 | 92 | 110 |
| 2 | 100 | 114 | 240 | 320 |
| 3 | 42 | 102 | 162 | 160 |
| 4 | 74 | 82 | 292 | 208 |
| 5 | 70 | 82 | 80 | 158 |
| 6 | 82 | 74 | 110 | 350 |
| 7 | 64 | 308 | 114 | 182 |
| 8 | 2 | 158 | 122 | 292 |
| 9 | 30 | 162 | 138 | 184 |
| 10 | 52 | 130 | 48 | 190 |
| 11 | 52 | 68 | 160 | 290 |
| 12 | 66 | 180 | 260 | 132 |
| 13 | 90 | 202 | 140 | 278 |
| 14 | 136 | 128 | 130 | 180 |
| 15 | 192 | 102 | 120 | 320 |
| 16 | 200 | 90 | 356 | 354 |
| 17 | 240 | 96 | 300 | 188 |
| 18 | 260 | 72 | 280 | 194 |
| 19 | 274 | 60 | 106 | 232 |
| 20 | 122 | 56 | 204 | 210 |
| 21 | 158 | 142 | 104 | 208 |
| 22 | 252 | 134 | 106 | 188 |
| 23 | 82 | 150 | 176 | 212 |
| 24 | 314 | 112 | 82 | 210 |
| 25 | 40 | 118 | 110 | 210 |
| 26 | 44 | 142 | 186 | 290 |
| 27 | 66 | 354 | 114 | 192 |
| 28 | 70 | 230 | 42 | 142 |
| 29 | 80 | 178 | 70 | 110 |
| 30 | 64 | 160 | 92 | 110 |
| 31 | 98 | 160 | 140 | 292 |
| 32 | 0 | 112 | 316 | 206 |
| 33 | 8 | 100 | 70 | 356 |
| 34 | 120 | 108 | 232 | 168 |
| 35 | 220 | 90 | 198 | 70 |
| 36 | 244 | 88 | 84 | 170 |
| 37 | 240 | 60 | 104 | 180 |
| 38 | 284 | 50 | 40 | 188 |
| 39 | 336 | 4 | 284 | 362 |
| 40 | 140 | 24 | 122 | 292 |

## Задача 1.4. Статистическая обработка данных

**при проверке геологических гипотез**

В районе, сложенном эффузивно-осадочными породами нижнего девона и толщей углисто-кремнистых сланцев нижнего карбона, широко развиты интрузии гранитов, сходных по составу и текстурам. Толща углисто-кремнистых сланцев залегает на размытой поверхности нижнедевонских пород и гранитах интрузии 1, но прорывается интрузией 2. Это позволяет предположить, что граниты района относятся, по крайней мере, к двум разновозрастным магматическим комплексам.

В северо-восточной части района детальными поисками в эндоконтакте среднепалеозойской интрузии 1 выявлены жилы редкометалльных пегматитов с промышленным содержанием тантала, олова, бериллия и лития. На выходах интрузии 2 проявлений редкометалльного оруденения не обнаружено. Для оценки возможной рудоносности интрузий 3, 4, 5 и 6 необходимо установить их возраст. Однако прямых геологических данных для решения этого вопроса нет.

По данным геохимического опробования интрузий 1 и 2 установлено, что среднепалеозойские граниты отличаются от более молодых нерудоносных гранитов (предположительно позднепалеозойских) повышенным содержанием $Na_2O$ и пониженным содержанием $K_2O$ (табл. 1.4). Эти различия могут быть использованы для оценки перспектив рудоносности интрузий 3, 4, 5 и 6 путем сравнения их химического состава (табл. 1.5.1-1.5.4) с интрузиями 1 и 2.

Таблица 1.4

Статистические характеристики распределения содержаний оксидов в рудоносных и нерудоносных гранитах

| Оксид | Статистические характеристики | Рудоносные граниты (интрузия 1) | Нерудоносные граниты (интрузия 2) |
|---|---|---|---|
| $Na_2O$ | N | 80 | 80 |
| | $\bar{x}$ | 4,20 | 3,02 |
| | S | 0,95 | 1,15 |
| | Закон распределения | Нормальный | Нормальный |
| $K_2O$ | N | 80 | 80 |
| | $\bar{x}$ | 2,93 | 3,65 |
| | S | 1,05 | 0,89 |
| | Закон распределения | Нормальный | Нормальный |

Так как химический состав каждой интрузии определялся по совокупности геохимических проб (т.е. по выборочным данным), объективно вопрос о сходстве или различии интрузий может быть решен только с помощью статистических критериев согласия.

***Требуется***:

1) проверить гипотезу о соответствии распределения содержаний оксидов щелочных металлов в интрузиях 3, 4, 5 и 6 нормальному или логнормальному закону;

2) получить оценки средних значений и дисперсий для содержания каждого оксида в интрузиях 3, 4, 5 и 6;

3) проверить гипотезу о равенстве средних значений и дисперсий содержаний оксидов в интрузиях 1 и 2 и исследуемых интрузиях 3, 4, 5 и 6, используя соответствующие статистические критерии;

4) оценить перспективность интрузий 3, 4, 5 и 6 на обнаружение редкометалльного оруденения.

Задачу решает бригада студентов. Каждый студент самостоятельно выполняет пункты 1-3 задания, оперируя результатами анализов на один из оксидов по одной из интрузий. Для выполнения п. 4 результаты, полученные каждым студентом, объединяются, и решение принимается с учетом всех данных.

***Методические указания.***

1. Используя статистическую программу для ЭВМ, создать файл данных по одной из таблиц 1.5.1-1.5.4.

2. Провести процедуру описательной статистики и получить необходимые параметры распределения (среднее, минимальное, максимальное значения, дисперсию, стандартное отклонение) для каждого окисла из файла данных.

3. Преобразовать цифровую информацию в графическую (гистограмму, «ящик с усами»). Сделать вывод о законе распределения содержаний оксидов.

4. Для проверки гипотезы о равенстве средних содержаний можно использовать критерии Стьюдента — t (при нормальном законе распределении), Родионова — Z (при логнормальном законе распределения). Гипотеза о равенстве дисперсий двух выборок проверяется с помощью критерия Фишера — F. Сравниваются только выборки с одинаковым законом распределения. При этом на калькуляторе необходимо выполнить следующие расчеты:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}, \qquad (3)$$

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ — средние значения параметров по сравниваемым объектам; $S_1^2$ и $S_2^2$ — оценки дисперсий; $N_1$ и $N_2$ — объемы выборок, по которым рассчитаны средние значения.

Значение t сравнивают с максимально допустимым значением $t_\alpha$ при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $k = N_1 + N_2 - 2$ (таблица значений критерия Стьюдента помещена в приложении 1. Уровень значимости α при подобных исследованиях обычно принимается равным 0,05). Если значения $t < t_\alpha$, то гипотеза о равенстве средних не отвергается.

В условиях логнормального закона критерий Стьюдента заменяют критерием Родионова — Z.

Критерий Фишера (F) рассчитывается по отношению дисперсий двух выборок:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \qquad (4)$$

где $S_1^2$ — бóльшая; $S_2^2$ — меньшая из сравниваемых оценок дисперсий.

В случае логнормального закона распределения сравнивают дисперсии логарифмов.

Величину критерия Фишера сравнивают с допустимым значением $F_\alpha$ (приложение 2) при уровне значимости $\alpha = 5\%$ и степенях свободы $k_1 = N_1 - 1$ и $k_2 = N_2 - 1$. Если значение F окажется меньше $F_\alpha$, то расхождением между оценками дисперсий можно пренебречь как случайными. При $F > F_\alpha$ гипотеза о равенстве дисперсий отвергается.

Таблица 1.5.1

Содержание оксидов (в %) по данным опробования 3 гранитной интрузии

| № п/п | $Na_2O$ | $K_2O$ | № п/п | $Na_2O$ | $K_2O$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,40 | 3,60 | 41 | 4,32 | 3,36 |
| 2 | 2,31 | 3,75 | 42 | 2,91 | 3,01 |
| 3 | 6,99 | 3,30 | 43 | 4,90 | 3,11 |
| 4 | 6,24 | 4,46 | 44 | 5,03 | 4,30 |
| 5 | 5,36 | 2,84 | 45 | 2,70 | 2,43 |
| 6 | 4,06 | 1,42 | 46 | 3,34 | 1,82 |
| 7 | 5,51 | 3,52 | 47 | 5,31 | 2,48 |
| 8 | 3,63 | 2,10 | 48 | 3,57 | 3,84 |
| 9 | 4,14 | 3,41 | 49 | 4,01 | 3,58 |
| 10 | 3,96 | 3,30 | 50 | 1,49 | 2,57 |
| 11 | 3,30 | 1,44 | 51 | 3,55 | 2,86 |
| 12 | 5,32 | 4,38 | 52 | 3,67 | 2,27 |
| 13 | 1,08 | 1,15 | 53 | 3,40 | 4,05 |
| 14 | 4,35 | 4,97 | 54 | 4,38 | 5,04 |
| 15 | 2,96 | 2,07 | 55 | 4,39 | 3,12 |
| 16 | 3,57 | 3,71 | 56 | 4,53 | 1,38 |
| 17 | 3,68 | 3,20 | 57 | 4,34 | 4,38 |
| 18 | 4,92 | 0,95 | 58 | 2,65 | 2,61 |
| 19 | 4,47 | 1,26 | 59 | 5,12 | 3,65 |
| 20 | 5,00 | 3,86 | 60 | 4,70 | 2,71 |
| 21 | 2,68 | 2,79 | 61 | 2,83 | 3,19 |
| 22 | 4,74 | 4,42 | 62 | 4,26 | 3,78 |
| 23 | 3,08 | 2,88 | 63 | 3,48 | 3,19 |
| 24 | 3,01 | 2,75 | 64 | 3,72 | 2,74 |
| 25 | 3,34 | 1,37 | 65 | 5,55 | 4,58 |
| 26 | 4,26 | 2,88 | 66 | 4,59 | 4,09 |
| 27 | 3,16 | 1,86 | 67 | 4,34 | 3,45 |
| 28 | 3,35 | 1,67 | 68 | 3,22 | 2,54 |
| 29 | 4,21 | 1,60 | 69 | 2,82 | 3,96 |
| 30 | 4,14 | 2,87 | 70 | 4,90 | 2,51 |
| 31 | 2,04 | 2,90 | 71 | 5,08 | 3,22 |
| 32 | 3,69 | 3,42 | 72 | 3,80 | 2,68 |
| 33 | 5,30 | 3,60 | 73 | 4,62 | 4,10 |
| 34 | 3,00 | 3,24 | 74 | 4,67 | 4,21 |
| 35 | 3,94 | 4,22 | 75 | 3,45 | 2,85 |
| 36 | 3,46 | 2,54 | 76 | 4,91 | 1,30 |
| 37 | 3,23 | 4,29 | 77 | 3,22 | 1,96 |
| 38 | 3,32 | 3,54 | 78 | 4,31 | 4,62 |
| 39 | 4,41 | 1,34 | 79 | 5,16 | 4,05 |
| 40 | 2,79 | 3,66 | 80 | 3,34 | 3,09 |

Таблица 1.5.2

Содержание оксидов (в %) по данным опробования 4 гранитной интрузии

| № п/п | $Na_2O$ | $K_2O$ | № п/п | $Na_2O$ | $K_2O$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4,34 | 3,73 | 41 | 5,00 | 1,81 |
| 2 | 4,82 | 4,16 | 42 | 2,98 | 4,30 |
| 3 | 5,13 | 2,50 | 43 | 4,09 | 1,81 |
| 4 | 3,34 | 4,01 | 44 | 3,24 | 2,34 |
| 5 | 4,64 | 5,88 | 45 | 4,12 | 4,19 |
| 6 | 2,56 | 3,20 | 46 | 4,48 | 3,41 |
| 7 | 4,00 | 1,73 | 47 | 2,51 | 3,16 |
| 8 | 5,42 | 4,26 | 48 | 4,06 | 2,37 |
| 9 | 3,46 | 2,72 | 49 | 4,25 | 3,75 |
| 10 | 5,24 | 4,71 | 50 | 3,62 | 2,78 |
| 11 | 3,33 | 3,58 | 51 | 4,35 | 1,47 |
| 12 | 4,44 | 3,24 | 52 | 3,71 | 1,02 |
| 13 | 4,83 | 3,08 | 53 | 3,12 | 3,78 |
| 14 | 5,30 | 2,15 | 54 | 3,94 | 3,31 |
| 15 | 2,90 | 2,50 | 55 | 4,76 | 3,48 |
| 16 | 3,54 | 3,44 | 56 | 5,44 | 0,43 |
| 17 | 2,11 | 1,12 | 57 | 4,84 | 2,61 |
| 18 | 4,14 | 2,75 | 58 | 4,63 | 0,17 |
| 19 | 4,63 | 2,68 | 59 | 3,56 | 3,36 |
| 20 | 4,69 | 3,86 | 60 | 2,78 | 1,26 |
| 21 | 4,29 | 2,74 | 61 | 2,99 | 2,91 |
| 22 | 3,95 | 0,17 | 62 | 4,88 | 3,08 |
| 23 | 3,04 | 3,95 | 63 | 5,02 | 2,62 |
| 24 | 3,92 | 2,03 | 64 | 3,16 | 2,10 |
| 25 | 4,02 | 1,31 | 65 | 6,20 | 2,66 |
| 26 | 3,90 | 2,44 | 66 | 5,30 | 3,51 |
| 27 | 5,30 | 2,37 | 67 | 3,09 | 3,00 |
| 28 | 3,86 | 1,89 | 68 | 2,41 | 1,72 |
| 29 | 4,04 | 1,27 | 69 | 4,28 | 1,31 |
| 30 | 3,16 | 3,52 | 70 | 3,27 | 2,01 |
| 31 | 4,86 | 2,43 | 71 | 3,55 | 1,64 |
| 32 | 4,08 | 3,47 | 72 | 4,34 | 2,18 |
| 33 | 3,16 | 2,69 | 73 | 3,34 | 2,85 |
| 34 | 4,80 | 3,60 | 74 | 3,59 | 2,17 |
| 35 | 5,22 | 2,78 | 75 | 4,28 | 2,19 |
| 36 | 4,69 | 3,74 | 76 | 4,90 | 1,66 |
| 37 | 3,00 | 0,98 | 77 | 4,80 | 3,50 |
| 38 | 2,08 | 2,36 | 78 | 4,84 | 2,68 |
| 39 | 5,00 | 2,30 | 79 | 2,84 | 2,57 |
| 40 | 2,64 | 3,48 | 80 | 2,78 | 4,05 |

Таблица 1.5.3

Содержание оксидов (в %) по данным опробования 5 гранитной интрузии

| № п/п | $Na_2O$ | $K_2O$ | № п/п | $Na_2O$ | $K_2O$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,12 | 3,78 | 41 | 2,73 | 2,29 |
| 2 | 2,76 | 3,34 | 42 | 3,90 | 3,84 |
| 3 | 2,13 | 4,71 | 43 | 1,57 | 4,32 |
| 4 | 1,98 | 5,15 | 44 | 4,33 | 4,63 |
| 5 | 3,42 | 4,16 | 45 | 2,75 | 2,84 |
| 6 | 3,06 | 3,46 | 46 | 2,60 | 4,14 |
| 7 | 3,56 | 4,18 | 47 | 3,34 | 2,06 |
| 8 | 0,64 | 4,97 | 48 | 3,82 | 3,50 |
| 9 | 4,96 | 4,02 | 49 | 4,38 | 4,92 |
| 10 | 2,72 | 5,14 | 50 | 2,64 | 2,96 |
| 11 | 3,93 | 2,62 | 51 | 3,08 | 4,74 |
| 12 | 1,97 | 3,14 | 52 | 3,13 | 2,83 |
| 13 | 3,48 | 5,09 | 53 | 2,76 | 3,94 |
| 14 | 5,71 | 3,60 | 54 | 2,12 | 4,33 |
| 15 | 2,94 | 4,18 | 55 | 3,47 | 4,80 |
| 16 | 2,70 | 2,42 | 56 | 3,04 | 2,43 |
| 17 | 2,61 | 3,82 | 57 | 4,42 | 3,04 |
| 18 | 1,95 | 3,87 | 58 | 1,97 | 1,61 |
| 19 | 1,65 | 2,80 | 59 | 4,81 | 3,64 |
| 20 | 4,00 | 4,02 | 60 | 2,42 | 3,96 |
| 21 | 1,98 | 3,78 | 61 | 3,44 | 4,19 |
| 22 | 3,55 | 4,89 | 62 | 2,15 | 3,79 |
| 23 | 3,42 | 3,91 | 63 | 3,49 | 3,45 |
| 24 | 3,07 | 3,56 | 64 | 3,68 | 2,54 |
| 25 | 3,52 | 2,56 | 65 | 1,78 | 4,42 |
| 26 | 3,48 | 4,01 | 66 | 3,89 | 3,52 |
| 27 | 3,83 | 2,09 | 67 | 2,22 | 3,41 |
| 28 | 4,11 | 2,65 | 68 | 2,81 | 4,80 |
| 29 | 4,27 | 2,31 | 69 | 2,07 | 3,36 |
| 30 | 3,23 | 3,68 | 70 | 1,42 | 3,53 |
| 31 | 2,70 | 3,41 | 71 | 3,08 | 2,66 |
| 32 | 4,06 | 2,63 | 72 | 4,60 | 3,66 |
| 33 | 3,16 | 2,76 | 73 | 0,10 | 3,56 |
| 34 | 2,87 | 3,91 | 74 | 4,12 | 4,72 |
| 35 | 1,80 | 3,37 | 75 | 4,21 | 4,19 |
| 36 | 4,70 | 3,13 | 76 | 4,17 | 2,50 |
| 37 | 2,09 | 3,50 | 77 | 3,28 | 1,58 |
| 38 | 4,22 | 2,82 | 78 | 3,04 | 4,14 |
| 39 | 1,35 | 3,92 | 79 | 3,11 | 3,34 |
| 40 | 4,30 | 4,29 | 80 | 3,20 | 1,26 |

Таблица 1.5.4

Содержание оксидов (в %) по данным опробования 6 гранитной интрузии

| № п/п | $Na_2O$ | $K_2O$ | № п/п | $Na_2O$ | $K_2O$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,25 | 4,25 | 41 | 1,07 | 2,95 |
| 2 | 2,70 | 4,36 | 42 | 3,71 | 3,68 |
| 3 | 2,02 | 3,55 | 43 | 3,34 | 3,05 |
| 4 | 2,55 | 4,79 | 44 | 2,41 | 3,37 |
| 5 | 3,51 | 3,92 | 45 | 1,47 | 4,85 |
| 6 | 2,30 | 4,62 | 46 | 3,36 | 3,92 |
| 7 | 3,28 | 4,20 | 47 | 2,43 | 2,12 |
| 8 | 2,49 | 5,04 | 48 | 1,19 | 3,63 |
| 9 | 1,22 | 4,93 | 49 | 4,53 | 1,14 |
| 10 | 2,96 | 4,70 | 50 | 1,99 | 2,42 |
| 11 | 3,29 | 2,87 | 51 | 3,76 | 2,46 |
| 12 | 3,99 | 3,59 | 52 | 3,79 | 3,29 |
| 13 | 2,51 | 4,20 | 53 | 2,42 | 3,24 |
| 14 | 2,77 | 2,18 | 54 | 2,67 | 4,16 |
| 15 | 1,78 | 4,45 | 55 | 2,63 | 3,58 |
| 16 | 2,52 | 4,22 | 56 | 3,04 | 3,31 |
| 17 | 4,00 | 3,37 | 57 | 4,32 | 3,12 |
| 18 | 0,50 | 3,54 | 58 | 1,74 | 6,00 |
| 19 | 2,26 | 5,16 | 59 | 4,70 | 3,93 |
| 20 | 1,78 | 4,20 | 60 | 3,63 | 3,46 |
| 21 | 2,79 | 2,82 | 61 | 3,07 | 2,48 |
| 22 | 2,91 | 2,70 | 62 | 7,69 | 2,66 |
| 23 | 4,78 | 2,57 | 63 | 3,43 | 4,14 |
| 24 | 3,07 | 3,77 | 64 | 2,48 | 3,77 |
| 25 | 3,18 | 2,85 | 65 | 2,22 | 3,36 |
| 26 | 2,19 | 5,07 | 66 | 4,98 | 3,11 |
| 27 | 1,99 | 3,18 | 67 | 3,34 | 3,38 |
| 28 | 4,45 | 0,51 | 68 | 4,61 | 3,75 |
| 29 | 3,76 | 3,36 | 69 | 1,81 | 2,53 |
| 30 | 3,29 | 3,04 | 70 | 1,55 | 3,99 |
| 31 | 2,33 | 2,29 | 71 | 3,10 | 4,32 |
| 32 | 3,39 | 1,50 | 72 | 4,62 | 3,07 |
| 33 | 2,60 | 4,90 | 73 | 3,18 | 3,74 |
| 34 | 0,97 | 4,92 | 74 | 5,50 | 2,68 |
| 35 | 1,80 | 1,10 | 75 | 2,15 | 3,74 |
| 36 | 3,99 | 2,92 | 76 | 2,97 | 3,38 |
| 37 | 1,94 | 3,39 | 77 | 2,05 | 1,93 |
| 38 | 3,03 | 4,16 | 78 | 4,02 | 4,43 |
| 39 | 3,60 | 2,96 | 79 | 2,56 | 2,67 |
| 40 | 1,40 | 6,00 | 80 | 4,79 | 3,46 |

# ТЕМА 2. ДВУМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

## Задача 2.1. Проверка гипотезы о существовании корреляционной связи между свинцом и золотом в рудах полиметаллического месторождения. Редактирование файла данных. Использование корреляционных связей для предсказания свойств геологических объектов

В рудах одного из полиметаллических месторождений присутствует золото, которое рассматривается как сопутствующий компонент. На одном из участков месторождения обнаружено, что корреляционная связь между концентрациями золота и свинца в рудах проявляется только при содержании свинца ниже 1,5 %, для богатых руд она практически отсутствует, а руды среднего качества характеризуются обратной корреляционной связью. Это объясняется тем, что в бедных вкрапленных рудах галенит первой генерации тесно ассоциирует с золотоносным пиритом, а высокие концентрации свинца в богатых рудах связаны с наличием более поздних незолотоносных кварц-карбонат-галенитовых прожилков.

Для подтверждения этой гипотезы и распространения её на закономерности формирования всего месторождения необходимо провести анализ результатов опробования руд соседнего неизученного участка месторождения.

***Требуется**:*

1) определить наличие корреляционной связи между золотом и свинцом в рудах на неизученном участке месторождения по выборке, представленной в таблице 2.1;

2) при наличии корреляционной связи рассчитать уравнение зависимости содержания золота от свинца в рудах.

***Методические указания.***

1. Создать файл данных, используя процедуру программы «STATISTICA».

2. Провести корреляционный анализ всей выборки. Для этого в меню с основными процедурами (STATISTICA Module Switcher) выбрать **Basic Statistics/Tables,** а в появившемся его меню — **Correlation matrices**.

3. При отсутствии значимой корреляционной связи между золотом и свинцом, проверить гипотезу о том, что такая связь может существовать только для бедных руд. Для этого из выборочных данных таблицы необходимо убрать пробы со значе-

ниями свинца более 1,5 %. Это можно проделать, используя процедуры сохранения и редактирования файла данных. Вначале имеющийся файл данных с таблицей необходимо сохранить под другим именем. Затем удалить ненужные ячейки. По обновленной таблице только с вкрапленными рудами провести корреляционный анализ между золотом и свинцом.

Если во вкрапленных рудах существует значимая корреляционная связь между золотом и свинцом, провести регрессионный анализ для определения уравнения зависимости концентрации золота от содержания в рудах свинца. Для этого в начальном меню «**STATISTICA Module Switcher**» выбираем «**Linear Regression**». Полученное уравнение регрессии дает представление о закономерностях в изучаемой выборке, где проанализированы как свинец, так и золото, но его можно использовать в дальнейшем для расчета прогнозной концентрации золота в пробах, по которым имеются лишь данные по содержанию свинца.

Полученные результаты с выводами оформляются в письменном виде и сдаются преподавателю.

Таблица 2.1

Содержание свинца и золота в рудах полиметаллического месторождения

| № проб | Pb | Au | № проб | Pb | Au | № проб | Pb | Au |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,05 | 3,76 | 19 | 1,21 | 0,61 | 37 | 5,16 | 0,87 |
| 2 | 5,03 | 2,09 | 20 | 2,92 | 0,40 | 38 | 0,37 | 1,15 |
| 3 | 0,80 | 1,98 | 21 | 0,74 | 0,27 | 39 | 0,44 | 0,91 |
| 4 | 0,31 | 0,20 | 22 | 1,53 | 2,57 | 40 | 2,21 | 4,25 |
| 5 | 0,77 | 3,10 | 23 | 3,70 | 0,90 | 41 | 4,67 | 2,03 |
| 6 | 4,01 | 1,67 | 24 | 2,71 | 1,69 | 42 | 1,44 | 4,31 |
| 7 | 1,19 | 2,59 | 25 | 1,90 | 4,32 | 43 | 3,13 | 0,25 |
| 8 | 1,26 | 1,70 | 26 | 1,51 | 2,30 | 44 | 1,35 | 0,39 |
| 9 | 0,68 | 0,23 | 27 | 0,21 | 1,22 | 45 | 0,81 | 1,35 |
| 10 | 0,91 | 1,21 | 28 | 4,81 | 1,05 | 46 | 1,32 | 3,51 |
| 11 | 4,33 | 0,91 | 29 | 1,38 | 2,09 | 47 | 0,99 | 1,62 |
| 12 | 2,38 | 1,68 | 30 | 3,96 | 2,54 | 48 | 2,41 | 3,98 |
| 13 | 0,98 | 2,44 | 31 | 1,96 | 1,58 | 49 | 1,03 | 0,35 |
| 14 | 0,42 | 0,50 | 32 | 0,52 | 0,82 | 50 | 1,55 | 2,80 |
| 15 | 1,71 | 1,21 | 33 | 2,95 | 0,20 | 51 | 3,39 | 0,41 |
| 16 | 3,51 | 1,15 | 34 | 1,10 | 1,44 | 52 | 1,23 | 1,58 |
| 17 | 1,11 | 2,30 | 35 | 0,93 | 3,15 | 53 | 1,48 | 4,22 |
| 18 | 2,10 | 3,48 | 36 | 1,78 | 1,21 | 54 | 4,03 | 1,19 |

## Задача 2.2. Проверка гипотезы о существовании корреляционной связи между содержанием гидрослюды в углях и зольностью углей на территории Сулино-Садкинского геолого-промышленного района Восточного Донбасса. Использование корреляционных связей для предсказания свойств геологических объектов

На территории шахтного поля литохимическим расчетом на основе данных о химическом составе золы 54 проб углей, отобранных из керна геологоразведочных скважин, было определено содержание гидрослюды в углях. Однако для большого числа скважин химический состав золы вообще не определялся, либо оказался утерян, а сохранились лишь данные по зольности этих углей. Предполагается высокая корреляция между содержанием гидрослюды в углях и зольностью, что позволит оперировать уже имеющимися данными по зольности.

Для подтверждения этой гипотезы и распространения её на всё шахтное поле необходимо провести корреляционный анализ.

***Требуется**:*

1) определить наличие корреляционной связи между зольностью и содержанием гидрослюды в угле по выборке, представленной в таблице 2.2;

2) при наличии корреляционной связи рассчитать уравнение зависимости содержания гидрослюды в угле от зольности.

***Методические указания.***

1. Создать файл данных, используя процедуру программы «STATISTICA».

2. Провести корреляционный анализ всей выборки. Для этого в меню с основными процедурами (STATISTICA Module Switcher) выбрать **Basic Statistics/Tables,** а в появившемся его меню — **Correlation matrices**.

3. Если существует значимая корреляционная связь между зольностью и содержанием гидрослюды в угле, провести регрессионный анализ, для определения уравнения зависимости содержания гидрослюды в угле от зольности. Для этого в начальном меню «**STATISTICA Module Switcher**» выбираем «**Linear Regression**».

4. Полученные результаты с выводами оформляются в письменном виде и сдаются преподавателю.

Таблица 2.2

Содержание гидрослюды и зольность углей

| № проб | Зольность, % | Гидрослюда в угле | № проб | Зольность, % | Гидрослюда в угле |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 28,1 | 7,05 | 28 | 10,1 | 1,96 |
| 2 | 15,4 | 2,62 | 29 | 14,0 | 2,07 |
| 3 | 12,8 | 3,34 | 30 | 19,4 | 6,35 |
| 4 | 11,1 | 1,96 | 31 | 13,9 | 2,42 |
| 5 | 10,4 | 2,37 | 32 | 8,1 | 4,19 |
| 6 | 9,3 | 2,22 | 33 | 10,1 | 1,02 |
| 7 | 17,8 | 2,88 | 34 | 10,2 | 3,73 |
| 8 | 13,7 | 2,53 | 35 | 11,8 | 3,21 |
| 9 | 17,8 | 6,94 | 36 | 23,8 | 4,51 |
| 10 | 15,2 | 3,78 | 37 | 9,3 | 2,70 |
| 11 | 16,4 | 2,61 | 38 | 24,5 | 4,90 |
| 12 | 12,8 | 1,41 | 39 | 15,7 | 3,94 |
| 13 | 12,3 | 1,82 | 40 | 16,1 | 4,92 |
| 14 | 13,9 | 1,78 | 41 | 7,5 | 2,12 |
| 15 | 16,1 | 2,68 | 42 | 12,4 | 2,53 |
| 16 | 9,6 | 3,27 | 43 | 13,7 | 6,43 |
| 17 | 6,6 | 0,57 | 44 | 9,0 | 2,00 |
| 18 | 17,6 | 3,50 | 45 | 10,9 | 4,23 |
| 19 | 10,9 | 1,72 | 46 | 21,3 | 2,34 |
| 20 | 8,0 | 2,20 | 47 | 8,3 | 2,03 |
| 21 | 12,1 | 2,88 | 48 | 11,8 | 3,02 |
| 22 | 8,1 | 2,05 | 49 | 24,0 | 10,52 |
| 23 | 13,7 | 1,60 | 50 | 6,9 | 0,48 |
| 24 | 17,6 | 9,77 | 51 | 7,0 | 3,44 |
| 25 | 12,5 | 3,68 | 52 | 47,9 | 27,67 |
| 26 | 15,4 | 4,55 | 53 | 42,3 | 24,92 |
| 27 | 12,5 | 3,4 | 54 | 41,5 | 9,90 |

# ТЕМА 3. МНОГОМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

## Задача 3.1. Оценка содержания попутного полезного компонента в полиметаллических рудах с помощью корреляционного анализа и уравнения регрессии

В рудах полиметаллического месторождения, кроме основных полезных компонентов — цинка, свинца и меди, содержатся попутные полезные компоненты — золото, серебро, кадмий, сурьма, барий, извлекаемые из руд в процессе переработки. При наличии корреляционной связи между концентрациями основных и одного из попутных компонентов содержания последнего по отдельным участкам месторождения могут оцениваться по присутствию основных компонентов, что позволяет существенно уменьшить затраты на анализы. Для решения вопроса о возможности применения корреляционного метода подсчета запасов попутного компонента и расчета уравнения регрессии используются результаты анализов на основные и попутный компоненты по пробам (табл. 3.1.1-3.1.8).

***Требуется:***

1) проверить гипотезу о наличии корреляционной связи между основными и одним из попутных компонентов;

2) определить, с каким из основных компонентов наиболее тесно связан попутный компонент;

3) получить корреляционную матрицу, дать ее графическое изображение. Выделить значимые коэффициенты корреляции;

4) при наличии корреляционных связей между основными и попутным компонентом провести регрессионный анализ с учетом связей между основными и попутным компонентами. Рассчитать уравнение регрессии для оценки содержания попутного компонента по основным.

***Методические указания.***

1. Создать файл данных, используя процедуру программы «STATISTICA» по одной из таблиц 3.1.1-3.1.8.

2. Провести корреляционный анализ всей выборки. Для этого в меню с основными процедурами (STATISTICA Module Switcher) выбрать **Basic Statistics/Tables,** а в появившемся его меню — **Correlation matrices**. В диалоговом окне процедуры кор-

реляционного анализа выбрать кнопку «**Matrix**» для получения графического изображения корреляционных связей.

3. Если существует значимая корреляционная связь между основными и попутным компонентами, провести регрессионный анализ, для определения уравнения зависимости содержания попутного компонента в руде от содержания основных компонентов. Для этого в начальном меню «**STATISTICA Module Switcher**» выбрать «**Linear Regression**».

4. Полученные результаты с выводами оформляются в письменном виде и сдаются преподавателю.

Таблица 3.1.1

Содержание основных и попутного полезных компонентов в рудах полиметаллического месторождения (участок 1)

| № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Au, г/т | № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Au, г/т |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,26 | 1,73 | 8,67 | 0,2 | 26 | 0,02 | 0,39 | 1,18 | 0,1 |
| 2 | 0,20 | 1,66 | 4,47 | 0,1 | 27 | 0,15 | 0,08 | 2,90 | 0,1 |
| 3 | 1,26 | 3,29 | 2,02 | 0,6 | 28 | 0,25 | 0,06 | 2,90 | 0,1 |
| 4 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 0,4 | 29 | 1,17 | 0,12 | 9,25 | 0,1 |
| 5 | 0,06 | 0,21 | 0,42 | 0,2 | 30 | 0,06 | 0,06 | 1,00 | 0,1 |
| 6 | 0,11 | 1,50 | 3,20 | 0,4 | 31 | 0,05 | 0,02 | 1,58 | 0,1 |
| 7 | 0,14 | 1,60 | 3,49 | 0,1 | 32 | 0,23 | 0,09 | 3,12 | 0,1 |
| 8 | 0,09 | 0,65 | 1,70 | 0,2 | 33 | 0,09 | 0,05 | 0,63 | 0,1 |
| 9 | 0,26 | 2,05 | 3,82 | 0,2 | 34 | 0,15 | 0,12 | 0,90 | 0,1 |
| 10 | 0,29 | 2,05 | 4,66 | 0,1 | 35 | 0,06 | 0,75 | 1,71 | 0,1 |
| 11 | 0,12 | 1,43 | 3,30 | 0,1 | 36 | 0,10 | 0,10 | 3,20 | 0,1 |
| 12 | 0,02 | 0,55 | 1,85 | 0,1 | 37 | 0,44 | 2,32 | 8,20 | 0,1 |
| 13 | 0,12 | 0,25 | 2,60 | 0,1 | 38 | 0,08 | 0,49 | 1,05 | 0,1 |
| 14 | 0,38 | 0,08 | 5,53 | 0,4 | 39 | 0,02 | 0,22 | 0,65 | 0,4 |
| 15 | 0,30 | 0,14 | 8,41 | 0,4 | 40 | 0,02 | 0,46 | 1,30 | 0,1 |
| 16 | 0,02 | 0,46 | 1,76 | 0,2 | 41 | 0,02 | 0,47 | 0,94 | 0,1 |
| 17 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 0,4 | 42 | 1,06 | 5,61 | 29,30 | 0,8 |
| 18 | 1,26 | 3,29 | 22,82 | 0,6 | 43 | 0,58 | 4,51 | 18,28 | 2,2 |
| 19 | 2,22 | 0,66 | 15,88 | 0,1 | 44 | 0,54 | 3,41 | 6,15 | 0,4 |
| 20 | 0,75 | 0,78 | 4,20 | 0,1 | 45 | 0,11 | 0,83 | 1,92 | 0,1 |
| 21 | 4,64 | 0,37 | 13,48 | 0,4 | 46 | 0,08 | 3,21 | 7,44 | 0,4 |
| 22 | 3,64 | 0,85 | 35,97 | 0,8 | 47 | 0,52 | 1,69 | 3,30 | 0,2 |
| 23 | 0,95 | 0,56 | 8,02 | 0,2 | 48 | 0,30 | 7,02 | 24,37 | 0,2 |
| 24 | 0,09 | 0,66 | 1,47 | 0,1 | 49 | 0,26 | 1,69 | 2,60 | 0,4 |
| 25 | 0,02 | 0,46 | 0,85 | 0,1 | 50 | 0,37 | 5,61 | 11,34 | 0,4 |

Таблица 3.1.2

Содержание основных и попутного полезных компонентов в рудах полиметаллического месторождения (участок 1)

| № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Ag, г/т | № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Ag, г/т |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,26 | 1,73 | 8,67 | 32,8 | 26 | 0,02 | 0,39 | 1,18 | 5,0 |
| 2 | 0,20 | 1,66 | 4,47 | 28,8 | 27 | 0,15 | 0,08 | 2,90 | 10,0 |
| 3 | 1,26 | 3,29 | 2,02 | 126,8 | 28 | 0,25 | 0,06 | 2,90 | 12,4 |
| 4 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 28,8 | 29 | 1,17 | 0,12 | 9,25 | 112,8 |
| 5 | 0,06 | 0,21 | 0,42 | 16,8 | 30 | 0,06 | 0,06 | 1,00 | 7,0 |
| 6 | 0,11 | 1,50 | 3,20 | 39,6 | 31 | 0,05 | 0,02 | 1,58 | 8,4 |
| 7 | 0,14 | 1,60 | 3,49 | 19,6 | 32 | 0,23 | 0,09 | 3,12 | 26,0 |
| 8 | 0,09 | 0,65 | 1,70 | 35,2 | 33 | 0,09 | 0,05 | 0,63 | 11,0 |
| 9 | 0,26 | 2,05 | 3,82 | 35,7 | 34 | 0,15 | 0,12 | 0,90 | 12,8 |
| 10 | 0,29 | 2,05 | 4,66 | 12,4 | 35 | 0,06 | 0,75 | 1,71 | 16,8 |
| 11 | 0,12 | 1,43 | 3,30 | 24,8 | 36 | 0,10 | 0,10 | 3,20 | 4,2 |
| 12 | 0,02 | 0,55 | 1,85 | 11,6 | 37 | 0,44 | 2,32 | 8,20 | 68,8 |
| 13 | 0,12 | 0,25 | 2,60 | 11,6 | 38 | 0,08 | 0,49 | 1,05 | 27,0 |
| 14 | 0,38 | 0,08 | 5,53 | 52,8 | 39 | 0,02 | 0,22 | 0,65 | 10,2 |
| 15 | 0,30 | 0,14 | 8,41 | 18,4 | 40 | 0,02 | 0,46 | 1,30 | 7,2 |
| 16 | 0,02 | 0,46 | 1,76 | 19,6 | 41 | 0,02 | 0,47 | 0,94 | 21,0 |
| 17 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 20,8 | 42 | 1,06 | 5,61 | 29,30 | 97,6 |
| 18 | 1,26 | 3,29 | 22,82 | 131,4 | 43 | 0,58 | 4,51 | 18,28 | 119,2 |
| 19 | 2,22 | 0,66 | 15,88 | 106,6 | 44 | 0,54 | 3,41 | 6,15 | 141,2 |
| 20 | 0,75 | 0,78 | 4,20 | 91,2 | 45 | 0,11 | 0,83 | 1,92 | 23,6 |
| 21 | 4,64 | 0,37 | 13,48 | 63,2 | 46 | 0,08 | 3,21 | 7,44 | 38,0 |
| 22 | 3,64 | 0,85 | 35,97 | 94,4 | 47 | 0,52 | 1,69 | 3,30 | 64,2 |
| 23 | 0,95 | 0,56 | 8,02 | 122,0 | 48 | 0,30 | 7,02 | 24,37 | 160,0 |
| 24 | 0,09 | 0,66 | 1,47 | 10,0 | 49 | 0,26 | 1,69 | 2,60 | 33,0 |
| 25 | 0,02 | 0,46 | 0,85 | 3,8 | 50 | 0,37 | 5,61 | 11,34 | 90,4 |

Таблица 3.1.3

Содержание основных и попутного полезных компонентов в рудах полиметаллического месторождения (участок 1)

| № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Cd, $10^{-4}$% | № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Cd, $10^{-4}$% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,26 | 1,73 | 8,67 | 32 | 26 | 0,02 | 0,39 | 1,18 | 4 |
| 2 | 0,20 | 1,66 | 4,47 | 19 | 27 | 0,15 | 0,08 | 2,90 | 40 |
| 3 | 1,26 | 3,29 | 2,02 | 4 | 28 | 0,25 | 0,06 | 2,90 | 10 |
| 4 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 33 | 29 | 1,17 | 0,12 | 9,25 | 37 |
| 5 | 0,06 | 0,21 | 0,42 | 2 | 30 | 0,06 | 0,06 | 1,00 | 3 |
| 6 | 0,11 | 1,50 | 3,20 | 7 | 31 | 0,05 | 0,02 | 1,58 | 6 |
| 7 | 0,14 | 1,60 | 3,49 | 9 | 32 | 0,23 | 0,09 | 3,12 | 14 |
| 8 | 0,09 | 0,65 | 1,70 | 4 | 33 | 0,09 | 0,05 | 0,63 | 3 |
| 9 | 0,26 | 2,05 | 3,82 | 15 | 34 | 0,15 | 0,12 | 0,90 | 3 |
| 10 | 0,29 | 2,05 | 4,66 | 13 | 35 | 0,06 | 0,75 | 1,71 | 6 |
| 11 | 0,12 | 1,43 | 3,30 | 10 | 36 | 0,10 | 0,10 | 3,20 | 12 |
| 12 | 0,02 | 0,55 | 1,85 | 7 | 37 | 0,44 | 2,32 | 8,20 | 31 |
| 13 | 0,12 | 0,25 | 2,60 | 9 | 38 | 0,08 | 0,49 | 1,05 | 3 |
| 14 | 0,38 | 0,08 | 5,53 | 22 | 39 | 0,02 | 0,22 | 0,65 | 2 |
| 15 | 0,30 | 0,14 | 8,41 | 34 | 40 | 0,02 | 0,46 | 1,30 | 4 |
| 16 | 0,02 | 0,46 | 1,76 | 7 | 41 | 0,02 | 0,47 | 0,94 | 2 |
| 17 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 32 | 42 | 1,06 | 5,61 | 29,30 | 101 |
| 18 | 1,26 | 3,29 | 22,82 | 84 | 43 | 0,58 | 4,51 | 18,28 | 62 |
| 19 | 2,22 | 0,66 | 15,88 | 62 | 44 | 0,54 | 3,41 | 6,15 | 26 |
| 20 | 0,75 | 0,78 | 4,20 | 16 | 45 | 0,11 | 0,83 | 1,92 | 6 |
| 21 | 4,64 | 0,37 | 13,48 | 51 | 46 | 0,08 | 3,21 | 7,44 | 28 |
| 22 | 3,64 | 0,85 | 35,97 | 160 | 47 | 0,52 | 1,69 | 3,30 | 13 |
| 23 | 0,95 | 0,56 | 8,02 | 35 | 48 | 0,30 | 7,02 | 24,37 | 96 |
| 24 | 0,09 | 0,66 | 1,47 | 5 | 49 | 0,26 | 1,69 | 2,60 | 10 |
| 25 | 0,02 | 0,46 | 0,85 | 3 | 50 | 0,37 | 5,61 | 11,34 | 38 |

Таблица 3.1.4

Содержание основных и попутного полезных компонентов в рудах полиметаллического месторождения (участок 1)

| № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Sb, $10^{-4}$% | № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Sb, $10^{-4}$% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,26 | 1,73 | 8,67 | 560 | 26 | 0,02 | 0,39 | 1,18 | 15 |
| 2 | 0,20 | 1,66 | 4,47 | 108 | 27 | 0,15 | 0,08 | 2,90 | 31 |
| 3 | 1,26 | 3,29 | 2,02 | 40 | 28 | 0,25 | 0,06 | 2,90 | 50 |
| 4 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 660 | 29 | 1,17 | 0,12 | 9,25 | 408 |
| 5 | 0,06 | 0,21 | 0,42 | 73 | 30 | 0,06 | 0,06 | 1,00 | 26 |
| 6 | 0,11 | 1,50 | 3,20 | 223 | 31 | 0,05 | 0,02 | 1,58 | 71 |
| 7 | 0,14 | 1,60 | 3,49 | 118 | 32 | 0,23 | 0,09 | 3,12 | 71 |
| 8 | 0,09 | 0,65 | 1,70 | 60 | 33 | 0,09 | 0,05 | 0,63 | 35 |
| 9 | 0,26 | 2,05 | 3,82 | 103 | 34 | 0,15 | 0,12 | 0,90 | 105 |
| 10 | 0,29 | 2,05 | 4,66 | 229 | 35 | 0,06 | 0,75 | 1,71 | 93 |
| 11 | 0,12 | 1,43 | 3,30 | 96 | 36 | 0,10 | 0,10 | 3,20 | 133 |
| 12 | 0,02 | 0,55 | 1,85 | 49 | 37 | 0,44 | 2,32 | 8,20 | 317 |
| 13 | 0,12 | 0,25 | 2,60 | 31 | 38 | 0,08 | 0,49 | 1,05 | 100 |
| 14 | 0,38 | 0,08 | 5,53 | 220 | 39 | 0,02 | 0,22 | 0,65 | 33 |
| 15 | 0,30 | 0,14 | 8,41 | 434 | 40 | 0,02 | 0,46 | 1,30 | 55 |
| 16 | 0,02 | 0,46 | 1,76 | 15 | 41 | 0,02 | 0,47 | 0,94 | 144 |
| 17 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 410 | 42 | 1,06 | 5,61 | 29,30 | 3100 |
| 18 | 1,26 | 3,29 | 22,82 | 2200 | 43 | 0,58 | 4,51 | 18,28 | 2310 |
| 19 | 2,22 | 0,66 | 15,88 | 464 | 44 | 0,54 | 3,41 | 6,15 | 920 |
| 20 | 0,75 | 0,78 | 4,20 | 55 | 45 | 0,11 | 0,83 | 1,92 | 220 |
| 21 | 4,64 | 0,37 | 13,48 | 684 | 46 | 0,08 | 3,21 | 7,44 | 164 |
| 22 | 3,64 | 0,85 | 35,97 | 3160 | 47 | 0,52 | 1,69 | 3,30 | 56 |
| 23 | 0,95 | 0,56 | 8,02 | 272 | 48 | 0,30 | 7,02 | 24,37 | 1980 |
| 24 | 0,09 | 0,66 | 1,47 | 57 | 49 | 0,26 | 1,69 | 2,60 | 164 |
| 25 | 0,02 | 0,46 | 0,85 | 9 | 50 | 0,37 | 5,61 | 11,34 | 638 |

Таблица 3.1.5

Содержание основных и попутного полезных компонентов в рудах полиметаллического месторождения (участок 1)

| № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Ba, % | № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Ba, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,26 | 1,73 | 8,67 | 9,92 | 26 | 0,02 | 0,39 | 1,18 | 2,21 |
| 2 | 0,20 | 1,66 | 4,47 | 5,07 | 27 | 0,15 | 0,08 | 2,90 | 4,19 |
| 3 | 1,26 | 3,29 | 2,02 | 19,95 | 28 | 0,25 | 0,06 | 2,90 | 3,12 |
| 4 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 9,41 | 29 | 1,17 | 0,12 | 9,25 | 2,52 |
| 5 | 0,06 | 0,21 | 0,42 | 2,54 | 30 | 0,06 | 0,06 | 1,00 | 1,94 |
| 6 | 0,11 | 1,50 | 3,20 | 7,63 | 31 | 0,05 | 0,02 | 1,58 | 2,45 |
| 7 | 0,14 | 1,60 | 3,49 | 6,87 | 32 | 0,23 | 0,09 | 3,12 | 4,84 |
| 8 | 0,09 | 0,65 | 1,70 | 2,18 | 33 | 0,09 | 0,05 | 0,63 | 4,10 |
| 9 | 0,26 | 2,05 | 3,82 | 7,34 | 34 | 0,15 | 0,12 | 0,90 | 4,81 |
| 10 | 0,29 | 2,05 | 4,66 | 8,01 | 35 | 0,06 | 0,75 | 1,71 | 4,21 |
| 11 | 0,12 | 1,43 | 3,30 | 10,15 | 36 | 0,10 | 0,10 | 3,20 | 3,41 |
| 12 | 0,02 | 0,55 | 1,85 | 2,19 | 37 | 0,44 | 2,32 | 8,20 | 27,78 |
| 13 | 0,12 | 0,25 | 2,60 | 3,06 | 38 | 0,08 | 0,49 | 1,05 | 1,73 |
| 14 | 0,38 | 0,08 | 5,53 | 4,00 | 39 | 0,02 | 0,22 | 0,65 | 1,73 |
| 15 | 0,30 | 0,14 | 8,41 | 3,36 | 40 | 0,02 | 0,46 | 1,30 | 1,89 |
| 16 | 0,02 | 0,46 | 1,76 | 2,24 | 41 | 0,02 | 0,47 | 0,94 | 1,88 |
| 17 | 0,34 | 3,08 | 8,46 | 9,41 | 42 | 1,06 | 5,61 | 29,30 | 23,82 |
| 18 | 1,26 | 3,29 | 22,82 | 10,95 | 43 | 0,58 | 4,51 | 18,28 | 18,53 |
| 19 | 2,22 | 0,66 | 15,88 | 0,92 | 44 | 0,54 | 3,41 | 6,15 | 35,00 |
| 20 | 0,75 | 0,78 | 4,20 | 2,56 | 45 | 0,11 | 0,83 | 1,92 | 2,00 |
| 21 | 4,64 | 0,37 | 13,48 | 6,29 | 46 | 0,08 | 3,21 | 7,44 | 9,98 |
| 22 | 3,64 | 0,85 | 35,97 | 5,58 | 47 | 0,52 | 1,69 | 3,30 | 6,65 |
| 23 | 0,95 | 0,56 | 8,02 | 3,25 | 48 | 0,30 | 7,02 | 24,37 | 19,92 |
| 24 | 0,09 | 0,66 | 1,47 | 3,01 | 49 | 0,26 | 1,69 | 2,60 | 7,76 |
| 25 | 0,02 | 0,46 | 0,85 | 1,66 | 50 | 0,37 | 5,61 | 11,34 | 9,00 |

Таблица 3.1.6

Содержание основных и попутного полезных компонентов в рудах полиметаллического месторождения (участок 2)

| № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Ba, % | № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Ba, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,02 | 0,69 | 1,40 | 0,05 | 26 | 0,06 | 1,37 | 3,50 | 9,84 |
| 2 | 0,58 | 8,40 | 7,79 | 16,10 | 27 | 0,37 | 1,76 | 5,00 | 10,25 |
| 3 | 0,10 | 0,89 | 1,78 | 0,14 | 28 | 0,06 | 0,56 | 1,52 | 0,10 |
| 4 | 0,11 | 1,13 | 1,63 | 0,12 | 29 | 0,06 | 0,78 | 1,68 | 0,15 |
| 5 | 0,18 | 0,48 | 1,78 | 0,15 | 30 | 0,08 | 1,09 | 2,07 | 0,48 |
| 6 | 0,16 | 1,29 | 1,73 | 0,10 | 31 | 0,34 | 8,00 | 18,39 | 20,05 |
| 7 | 0,21 | 0,55 | 0,91 | 0,10 | 32 | 0,10 | 5,70 | 8,53 | 19,11 |
| 8 | 0,02 | 0,19 | 0,45 | 0,12 | 33 | 0,02 | 0,72 | 2,50 | 1,06 |
| 9 | 0,22 | 2,85 | 3,13 | 6,10 | 34 | 0,08 | 0,70 | 1,78 | 0,12 |
| 10 | 0,02 | 0,72 | 1,54 | 0,24 | 35 | 0,08 | 0,86 | 2,00 | 2,12 |
| 11 | 0,13 | 1,02 | 1,73 | 0,20 | 36 | 0,09 | 2,55 | 6,95 | 19,50 |
| 12 | 0,06 | 0,53 | 1,18 | 0,14 | 37 | 0,02 | 1,20 | 3,20 | 5,42 |
| 13 | 0,07 | 0,26 | 1,54 | 0,12 | 38 | 0,70 | 0,02 | 3,73 | 4,38 |
| 14 | 0,05 | 0,64 | 2,30 | 0,05 | 39 | 0,43 | 4,30 | 11,49 | 18,10 |
| 15 | 0,27 | 1,69 | 6,75 | 10,05 | 40 | 0,18 | 0,96 | 2,80 | 0,27 |
| 16 | 0,02 | 0,44 | 1,29 | 0,05 | 41 | 0,11 | 1,00 | 1,52 | 0,23 |
| 17 | 0,08 | 2,56 | 8,57 | 23,00 | 42 | 1,13 | 5,98 | 12,58 | 19,22 |
| 18 | 0,15 | 0,52 | 2,82 | 2,16 | 43 | 0,16 | 0,82 | 2,62 | 0,26 |
| 19 | 0,09 | 0,52 | 1,26 | 0,16 | 44 | 0,26 | 2,20 | 4,90 | 8,14 |
| 20 | 0,14 | 1,74 | 5,52 | 8,05 | 45 | 0,82 | 7,63 | 13,10 | 17,05 |
| 21 | 0,09 | 0,39 | 0,93 | 0,23 | 46 | 0,09 | 2,48 | 2,23 | 0,20 |
| 22 | 0,12 | 1,06 | 2,60 | 2,23 | 47 | 0,18 | 0,48 | 3,02 | 5,14 |
| 23 | 0,02 | 2,00 | 5,30 | 15,08 | 48 | 0,22 | 0,91 | 3,10 | 0,34 |
| 24 | 0,02 | 0,83 | 1,90 | 0,40 | 49 | 0,07 | 0,74 | 1,93 | 0,13 |
| 25 | 0,11 | 1,64 | 5,40 | 5,40 | 50 | 0,02 | 0,75 | 1,51 | 0,26 |

Таблица 3.1.7

Содержание основных и попутного полезных компонентов в рудах полиметаллического месторождения (участок 2)

| № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Ag, г/т | № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Ag, г/т |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,02 | 0,69 | 1,40 | 0,05 | 26 | 0,06 | 1,37 | 3,50 | 0,02 |
| 2 | 0,58 | 8,40 | 7,79 | 80,40 | 27 | 0,37 | 1,76 | 5,00 | 10,80 |
| 3 | 0,10 | 0,89 | 1,78 | 0,05 | 28 | 0,06 | 0,56 | 1,52 | 2,00 |
| 4 | 0,11 | 1,13 | 1,63 | 0,05 | 29 | 0,06 | 0,78 | 1,68 | 5,60 |
| 5 | 0,18 | 0,48 | 1,78 | 5,20 | 30 | 0,08 | 1,09 | 2,07 | 5,20 |
| 6 | 0,16 | 1,29 | 1,73 | 12,80 | 31 | 0,34 | 8,00 | 18,39 | 53,20 |
| 7 | 0,21 | 0,55 | 0,91 | 8,00 | 32 | 0,10 | 5,70 | 8,53 | 133,20 |
| 8 | 0,02 | 0,19 | 0,45 | 0,05 | 33 | 0,02 | 0,72 | 2,50 | 29,20 |
| 9 | 0,22 | 2,85 | 3,13 | 100,00 | 34 | 0,08 | 0,70 | 1,78 | 15,20 |
| 10 | 0,02 | 0,72 | 1,54 | 0,05 | 35 | 0,08 | 0,86 | 2,00 | 11,60 |
| 11 | 0,13 | 1,02 | 1,73 | 0,05 | 36 | 0,09 | 2,55 | 6,95 | 112,00 |
| 12 | 0,06 | 0,53 | 1,18 | 0,05 | 37 | 0,02 | 1,20 | 3,20 | 29,20 |
| 13 | 0,07 | 0,26 | 1,54 | 4,80 | 38 | 0,70 | 0,02 | 3,73 | 10,80 |
| 14 | 0,05 | 0,64 | 2,30 | 4,00 | 39 | 0,43 | 4,30 | 11,49 | 58,00 |
| 15 | 0,27 | 1,69 | 6,75 | 10,00 | 40 | 0,18 | 0,96 | 2,80 | 12,00 |
| 16 | 0,02 | 0,44 | 1,29 | 17,20 | 41 | 0,11 | 1,00 | 1,52 | 9,20 |
| 17 | 0,08 | 2,56 | 8,57 | 120,00 | 42 | 1,13 | 5,98 | 12,58 | 56,80 |
| 18 | 0,15 | 0,52 | 2,82 | 21,60 | 43 | 0,16 | 0,82 | 2,62 | 0,02 |
| 19 | 0,09 | 0,52 | 1,26 | 10,80 | 44 | 0,26 | 2,20 | 4,90 | 63,60 |
| 20 | 0,14 | 1,74 | 5,52 | 50,00 | 45 | 0,82 | 7,63 | 13,10 | 59,60 |
| 21 | 0,09 | 0,39 | 0,93 | 0,05 | 46 | 0,09 | 2,48 | 2,23 | 44,00 |
| 22 | 0,12 | 1,06 | 2,60 | 30,00 | 47 | 0,18 | 0,48 | 3,02 | 0,02 |
| 23 | 0,02 | 2,00 | 5,30 | 20,20 | 48 | 0,22 | 0,91 | 3,10 | 6,40 |
| 24 | 0,02 | 0,83 | 1,90 | 10,00 | 49 | 0,07 | 0,74 | 1,93 | 2,80 |
| 25 | 0,11 | 1,64 | 5,40 | 104,80 | 50 | 0,02 | 0,75 | 1,51 | 3,60 |

Таблица 3.1.8

Содержание основных и попутного полезных компонентов в рудах полиметаллического месторождения (участок 2)

| № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Cd, $10^{-4}$% | № п/п | Cu, % | Pb, % | Zn, % | Cd, $10^{-4}$% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,02 | 0,69 | 1,40 | 5 | 26 | 0,06 | 1,37 | 3,50 | 11 |
| 2 | 0,58 | 8,40 | 7,79 | 3 | 27 | 0,37 | 1,76 | 5,00 | 14 |
| 3 | 0,10 | 0,89 | 1,78 | 5 | 28 | 0,06 | 0,56 | 1,52 | 4 |
| 4 | 0,11 | 1,13 | 1,63 | 5 | 29 | 0,06 | 0,78 | 1,68 | 4 |
| 5 | 0,18 | 0,48 | 1,78 | 5 | 30 | 0,08 | 1,09 | 2,07 | 4 |
| 6 | 0,16 | 1,29 | 1,73 | 5 | 31 | 0,34 | 8,00 | 18,39 | 67 |
| 7 | 0,21 | 0,55 | 0,91 | 4 | 32 | 0,10 | 5,70 | 8,53 | 29 |
| 8 | 0,02 | 0,19 | 0,45 | 2 | 33 | 0,02 | 0,72 | 2,50 | 7 |
| 9 | 0,22 | 2,85 | 3,13 | 12 | 34 | 0,08 | 0,70 | 1,78 | 7 |
| 10 | 0,02 | 0,72 | 1,54 | 4 | 35 | 0,08 | 0,86 | 2,00 | 6 |
| 11 | 0,13 | 1,02 | 1,73 | 6 | 36 | 0,09 | 2,55 | 6,95 | 23 |
| 12 | 0,06 | 0,53 | 1,18 | 4 | 37 | 0,02 | 1,20 | 3,20 | 10 |
| 13 | 0,07 | 0,26 | 1,54 | 5 | 38 | 0,70 | 0,02 | 3,73 | 7 |
| 14 | 0,05 | 0,64 | 2,30 | 5 | 39 | 0,43 | 4,30 | 11,49 | 43 |
| 15 | 0,27 | 1,69 | 6,75 | 32 | 40 | 0,18 | 0,96 | 2,80 | 7 |
| 16 | 0,02 | 0,44 | 1,29 | 3 | 41 | 0,11 | 1,00 | 1,52 | 7 |
| 17 | 0,08 | 2,56 | 8,57 | 31 | 42 | 1,13 | 5,98 | 12,58 | 50 |
| 18 | 0,15 | 0,52 | 2,82 | 11 | 43 | 0,16 | 0,82 | 2,62 | 60 |
| 19 | 0,09 | 0,52 | 1,26 | 4 | 44 | 0,26 | 2,20 | 4,90 | 18 |
| 20 | 0,14 | 1,74 | 5,52 | 12 | 45 | 0,82 | 7,63 | 13,10 | 56 |
| 21 | 0,09 | 0,39 | 0,93 | 2 | 46 | 0,09 | 2,48 | 2,23 | 5 |
| 22 | 0,12 | 1,06 | 2,60 | 7 | 47 | 0,18 | 0,48 | 3,02 | 11 |
| 23 | 0,02 | 2,00 | 5,30 | 18 | 48 | 0,22 | 0,91 | 3,10 | 10 |
| 24 | 0,02 | 0,83 | 1,90 | 7 | 49 | 0,07 | 0,74 | 1,93 | 4 |
| 25 | 0,11 | 1,64 | 5,40 | 13 | 50 | 0,02 | 0,75 | 1,51 | 5 |

# ТЕМА 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ

## Задача 4.1. Выделение ассоциаций химических элементов, классификация признаков и точек наблюдения, выбор информативных признаков оруденения, идентификация и прогнозная оценка геологического объекта с использованием методов корреляционного, кластерного, факторного анализов. Графическое изображение значений прогнозного фактора по поисковому профилю

В одном из районов выявлено месторождение золота, приуроченное к зоне развития калиевых метасоматитов, а также ряд непромышленных по масштабу проявлений золоторудной и полиметаллической минерализации.

В рудах месторождения и окружающих их ореолах рассеяния золото ассоциирует с оловом и мышьяком, а на верхних горизонтах также с серебром, свинцом и сурьмой. Для окружающих неизмененных пород характерна положительная корреляционная связь между калием, ураном и торием. Непосредственно вблизи рудных тел в результате калиевого метасоматоза эта связь нарушается.

Данные особенности месторождения могут быть использованы для разбраковки многочисленных геохимических аномалий, выявленных в этом районе при проведении металлометрической съемки.

К перспективным объектам должны быть отнесены в первую очередь комплексные аномалии с характерными для месторождения ассоциациями элементов, пространственно совпадающие с участками проявления калиевого метасоматоза.

В таблице 4.1 приведены содержания химических элементов в пробах метасоматитов по одному из аномальных участков района.

***Требуется:***

1) выявить геохимические ассоциации элементов;

2) определить, относятся ли данные метасоматиты к рудоносным;

3) оценить уровень эрозионного среза рудной зоны;

4) на поисковом профиле определить наиболее перспективные участки для первоочередного бурения

***Методические указания.***

1. Создать в программе «STATISTICA» файл данных, используя таблицу 4.1.

2. Провести корреляционный анализ (в меню программы «STATISTICA» → Basic Statistics/Tables → Correlation matrices); определить значимые парные коэффициенты корреляции, используя корреляционную матрицу; провести графическую процедуру корреляционного анализа (в его диалоговом окне кнопка «Matrix») для всех признаков и отметить, как выглядит графически сильная корреляционная связь между двумя признаками.

3. Провести кластерный анализ для выделения ассоциаций химических элементов (в основном меню программы «STATISTICA» — Cluster Analysis), используя графическую и табличную формы.

4. Провести факторный анализ (в основном меню программы «STATISTICA» — Factor Analysis). Получить матрицу факторных нагрузок на признаки (в результирующем диалоговом окне факторного анализа — кнопка «Factor loadings»), выделить наиболее высокие (+ или -) нагрузки в каждом факторе для выявления ассоциаций химических элементов. Определить фактор с высокими нагрузками на Au – «рудный» и фактор, связанный с околорудным метасоматозом. Обратить внимание на вес факторов, для того, чтобы определить, в какой мере данная закономерность характеризует изучаемый объект.

5. Сравнить результаты корреляционного, кластерного и факторного анализов, их отличия, связанные с возможностями каждого анализа, и общие черты, позволяющие дать взвешенное заключение о закономерных связях между изучаемыми признаками.

6. Используя процедуру факторного анализа, получить таблицу со значениями каждого фактора в точках наблюдения (в результирующем диалоговом окне факторного анализа — кнопка «Factor scores»). Обратить внимание, в каких точках наблюдения значения рудного фактора наибольшие.

7. Изобразить графически значения факторов по профилю точек наблюдения. Для этого в таблице («Factor scores») выделить «рудный» фактор» и фактор околорудного метасоматоза. Затем выбрать процедуру графического анализа на панели инструментов (Graphs → Stats 2G Graphs → Line Plots). На полученном графике выделить места, где максимально проявлены факторы рудного метасоматоза.

Все полученные промежуточные результаты с таблицами и схематическими графиками, их описанием, а также окончательные выводы о геохимических ассоциациях элементов и прогнозной значимости объекта оформить и сдать преподавателю в письменном виде.

Таблица 4.1

Содержание типоморфных элементов в метасоматитах

| № проб | Ag | Pb | Sn | As | Sb | Au | K | U | Th |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,8 | 1 | 5 | 3 | 0,01 | 20 | 30 | 5 |
| 2 | 13 | 17 | 2 | 1 | 0,2 | 2 | 120 | 35 | 15 |
| 3 | 0,2 | 0,8 | 10 | 0,5 | 2 | 0,1 | 43 | 55 | 10 |
| 4 | 0,5 | 1 | 45 | 25 | 0,1 | 3 | 320 | 77 | 35 |
| 5 | 0,6 | 0,5 | 40 | 40 | 0,1 | 4 | 175 | 85 | 42 |
| 6 | 3,5 | 4,8 | 1 | 0,3 | 0,4 | 0,1 | 55 | 65 | 17 |
| 7 | 0,5 | 0,2 | 0,8 | 2 | 0,3 | 0,2 | 66 | 60 | 21 |
| 8 | 25 | 53 | 0,1 | 0,5 | 14 | 6 | 350 | 13 | 6 |
| 9 | 0,3 | 1 | 0,5 | 0,1 | 0,5 | 0,1 | 82 | 64 | 26 |
| 10 | 0,2 | 5 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,01 | 48 | 45 | 16 |
| 11 | 3 | 6 | 110 | 60 | 0,2 | 10 | 270 | 100 | 35 |
| 12 | 0,1 | 0,5 | 5 | 0,5 | 0,8 | 0,2 | 35 | 30 | 11 |
| 13 | 1 | 3 | 0,1 | 0,7 | 1 | 0,1 | 92 | 75 | 28 |
| 14 | 21 | 45 | 3 | 2 | 15 | 4 | 225 | 80 | 38 |
| 15 | 47 | 65 | 0,5 | 0,1 | 23 | 10 | 280 | 15 | 5 |
| 16 | 0,5 | 3 | 0,5 | 0,2 | 1 | 0,1 | 83 | 63 | 25 |
| 17 | 2 | 4 | 145 | 90 | 0,1 | 12 | 280 | 50 | 25 |
| 18 | 0,7 | 1 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,01 | 45 | 40 | 15 |
| 19 | 0,4 | 2 | 0,5 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 63 | 55 | 19 |
| 20 | 0,1 | 0,5 | 3 | 1 | 0,5 | 0,3 | 15 | 21 | 3 |
| 21 | 5 | 12 | 0,5 | 0,1 | 0,1 | 1 | 58 | 75 | 27 |
| 22 | 0,2 | 0,1 | 0,8 | 0,2 | 0,4 | 0,01 | 36 | 45 | 12 |
| 23 | 0,1 | 0,3 | 0,6 | 0,3 | 0,02 | 0,03 | 53 | 40 | 15 |
| 24 | 5 | 10 | 63 | 45 | 0,1 | 5 | 80 | 25 | 17 |
| 25 | 0,1 | 0,5 | 0,5 | 2 | 0,01 | 0,01 | 60 | 53 | 18 |
| 26 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,5 | 0,1 | 0,1 | 45 | 30 | 10 |
| 27 | 0,1 | 0,6 | 0,1 | 0,6 | 0,02 | 0,02 | 38 | 25 | 12 |
| 28 | 4 | 5 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 1 | 125 | 10 | 3 |
| 29 | 0,2 | 0,1 | 3 | 0,1 | 1 | 1 | 52 | 45 | 15 |
| 30 | 0,6 | 0,1 | 1 | 0,2 | 0,2 | 0,5 | 30 | 25 | 8 |
| 31 | 0,3 | 1 | 4 | 1 | 0,1 | 0,01 | 42 | 35 | 13 |
| 32 | 0,1 | 0,1 | 2 | 3 | 0,3 | 0,1 | 60 | 53 | 16 |
| 33 | 4 | 7 | 15 | 5 | 0,1 | 1 | 160 | 10 | 15 |
| 34 | 0,6 | 0,2 | 1 | 3 | 0,5 | 0,5 | 70 | 62 | 20 |
| 35 | 0,2 | 1 | 3 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 55 | 43 | 18 |
| 36 | 10 | 20 | 5 | 3 | 0,7 | 3 | 180 | 50 | 25 |

## ЛИТЕРАТУРА

1. Грановская Н.В., Дудкевич Л.К. Применение математических методов при геологическом прогнозе. Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1997. 43 с.

2. Грановская Н.В. Инструкция для работы с программой «STATISTICA». Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 2001. 29 с.

3. Гуськов О.И., Кушнарев П.И., Таранов С.М. Математические методы в геологии. Сборник задач: Учеб. пособие для вузов. М.: Недра, 1991. 205 с.

4. Каждан А.Б., Гуськов О.И. Математические методы в геологии: Учебник для вузов. М.: Недра, 1990. 251 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Значения t-критерия Стьюдента для 5%-ного уровня значимости

| Число степеней свободы f | $t_{5\%}$ | Число степеней свободы f | $t_{5\%}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 12,71 | 18 | 2,10 |
| 2 | 4,30 | 19 | 2,09 |
| 3 | 3,18 | 20 | 2,09 |
| 4 | 2,77 | 21 | 2,08 |
| 5 | 2,57 | 22 | 2,07 |
| 6 | 2,45 | 23 | 2,07 |
| 7 | 2,36 | 24 | 2,06 |
| 8 | 2,31 | 25 | 2,06 |
| 9 | 2,26 | 26 | 2,06 |
| 10 | 2,23 | 27 | 2,05 |
| 11 | 2,20 | 28 | 2,05 |
| 12 | 2,18 | 29 | 2,04 |
| 13 | 2,16 | 30 | 2,04 |
| 14 | 2,14 | 40 | 2,02 |
| 15 | 2,13 | 60 | 2,00 |
| 16 | 2,12 | 120 | 1,980 |
| 17 | 2,11 | $\infty$ | 1,960 |

П р и м е ч а н и е . $f = n_1 + n_2 - 2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Значения F-критерия Фишера для 5%-ного уровня значимости

| $f_2$ \ $f_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 12 | 24 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 164,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 244,9 | 249,0 | 254,3 |
| 2 | 18,5 | 19,2 | 19,3 | 19,3 | 19,3 | 19,3 | 19,4 | 19,5 | 19,5 |
| 3 | 10,1 | 9,6 | 9,3 | 9,1 | 9,0 | 8,9 | 8,7 | 8,6 | 8,5 |
| 4 | 7,7 | 6,9 | 6,6 | 6,4 | 6,3 | 6,2 | 5,9 | 5,8 | 5,6 |
| 5 | 6,6 | 5,8 | 5,4 | 5,2 | 5,1 | 5,0 | 4,7 | 4,5 | 4,4 |
| 6 | 6,0 | 5,1 | 4,8 | 4,5 | 4,4 | 4,3 | 4,0 | 3,8 | 3,7 |
| 7 | 5,6 | 4,7 | 4,4 | 4,1 | 4,0 | 3,9 | 3,6 | 3,4 | 3,2 |
| 8 | 5,3 | 4,5 | 4,1 | 3,8 | 3,7 | 3,6 | 3,3 | 3,1 | 2,9 |
| 9 | 5,1 | 4,3 | 3,9 | 3,6 | 3,5 | 3,4 | 3,1 | 2,9 | 2,7 |
| 10 | 2,0 | 4,1 | 3,7 | 3,5 | 3,3 | 3,2 | 2,9 | 2,7 | 2,5 |
| 11 | 4,8 | 4,0 | 3,6 | 3,4 | 3,2 | 3,1 | 2,8 | 2,6 | 2,4 |
| 12 | 4,8 | 3,9 | 3,5 | 3,3 | 3,1 | 3,0 | 2,7 | 2,5 | 2,3 |
| 13 | 4,7 | 3,8 | 3,4 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,6 | 2,4 | 2,2 |
| 14 | 4,6 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 3,0 | 2,9 | 2,5 | 2,3 | 2,1 |
| 15 | 4,5 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 2,9 | 2,8 | 2,5 | 2,3 | 2,1 |
| 16 | 4,5 | 3,6 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,0 |
| 17 | 4,5 | 3,6 | 3,2 | 3,0 | 2,8 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,0 |
| 18 | 4,4 | 3,6 | 3,2 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,3 | 2,1 | 1,9 |
| 19 | 4,4 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,3 | 2,1 | 1,9 |
| 20 | 4,4 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,3 | 2,1 | 1,8 |
| 22 | 4,4 | 3,4 | 3,0 | 2,8 | 2,7 | 2,6 | 2,2 | 2,0 | 1,8 |
| 24 | 4,3 | 3,4 | 3,0 | 2,8 | 2,6 | 2,5 | 2,2 | 2,0 | 1,7 |
| 26 | 4,2 | 3,4 | 3,0 | 2,7 | 2,6 | 2,5 | 2,2 | 2,0 | 1,7 |
| 28 | 4,2 | 3,3 | 3,0 | 2,7 | 2,6 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,7 |
| 30 | 4,2 | 3,3 | 2,9 | 2,7 | 2,5 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,6 |
| 40 | 4,1 | 3,2 | 2,9 | 2,6 | 2,5 | 2,3 | 2,0 | 1,8 | 1,5 |
| 60 | 4,0 | 3,2 | 2,8 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 1,9 | 1,7 | 1,4 |
| 120 | 3,9 | 3,1 | 2,7 | 2,5 | 2,3 | 2,2 | 1,8 | 1,6 | 1,3 |
| ∞ | 3,8 | 3,0 | 2,6 | 2,4 | 2,2 | 2,1 | 1,8 | 1,5 | 1,0 |

Примечание. $f_1 = n_1 - 1$ — число степеней свободы для большей дисперсии; $f_2 = n_2 - 1$ — число степеней свободы для меньшей дисперсии.